

# OLIMPIÁDA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA

PROF. JOSÉ VIEIRA ALVES

XXV OCM 2012

Nível 03

1º, 2º e 3º Anos do Ensino Médio



Nome completo do aluno

Endereço completo do aluno (Rua, Av., nº)

Complemento

Bairro

Cidade

UF

CEP

Endereço eletrônico (email)

DDD

Telefone

Escola

DDD

Telefone (outro)

## INSTRUÇÕES:

01. A prova será realizada no dia 26/05/2012 das 14:00h às 18:00h.

02. Cada questão da 1ª parte vale 10 (dez) pontos, enquanto que cada problema da 2ª parte vale 40 (quarenta) pontos.

03. Todas as soluções da 2ª parte devem ser justificadas. Uma simples resposta, sem indicar como foi obtida, receberá uma pontuação inferior.

04. Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso não graduados.

05. Nas 10 (dez) primeiras questões da 1ª parte assinale com X a alternativa que julgar correta na tabela ao lado. Assinale, com caneta, somente uma alternativa para cada questão.

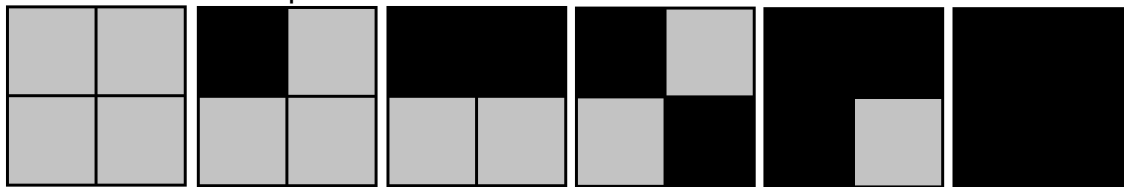
Preencha  
e confira  
os dados  
acima com  
muita atenção!

## GABARITO:

01	(A) (B) (C) (D) (E)
02	(A) (B) (C) (D) (E)
03	(A) (B) (C) (D) (E)
04	(A) (B) (C) (D) (E)
05	(A) (B) (C) (D) (E)
06	(A) (B) (C) (D) (E)
07	(A) (B) (C) (D) (E)
08	(A) (B) (C) (D) (E)
09	(A) (B) (C) (D) (E)
10	(A) (B) (C) (D) (E)

## 1ª PARTE

01. Usando duas cores é possível pintar um quadrado  $2 \times 2$  de apenas 6 maneiras diferentes mostradas abaixo usando as cores cinza e preta:



De quantas maneiras diferentes podemos pintar o mesmo quadrado com 3 cores diferentes?

- a) 6                      b) 9                      c) 12                      d) 18                      e) 24

02. Oito máquinas idênticas fabricam juntas dezesseis peças idênticas em oito minutos. Devemos fabricar cento e noventa e duas peças com as oito máquinas, entretanto, após uma hora e quatro minutos de funcionamento duas máquinas quebraram e o resto das peças teve que ser fabricado pelas seis máquinas restantes. De quanto tempo foi o atraso na produção das peças?

- a) 96min                      b) 42min e 40s                      c) 10min 40s                      d) 106min 40s                      e) 5min

03. Um pedreiro deve cobrir uma parede de 6m de comprimento por 3m de altura com cerâmica e rejunto. Ele inicia seu trabalho colocando uma cerâmica no canto superior esquerdo, intercalando cerâmica e rejunto nessa ordem, sabendo que cada cerâmica mede 19cm de comprimento por 14cm de altura, e que entre duas cerâmicas vizinhas (mesma linha ou mesma coluna) deve haver rejunto que mede 1cm, usando esse padrão quantas cerâmicas serão necessárias para cobrir a parede inteira?

- a) 700                      b) 750                      c) 600                      d) 677                      e) 536

04. Uma mulher foi à feira livre e gastou parte do dinheiro que tinha na sua bolsa em três bancos. Em cada um gastou R\$ 2,00 (dois reais) a mais do que  $\frac{1}{3}$  do que tinha ao chegar ao banco. Qual a soma dos dígitos da quantia que essa mulher tinha antes de chegar ao primeiro banco da feira, sabendo que ao passar pelos três bancos ainda sobraram R\$ 2,00?

- a) 14                      b) 10                      c) 6                      d) 3                      e) 7

05. Seja  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , onde  $\mathbb{Z}$  denota o conjunto dos números inteiros, tal que  $f(7) = 14$  e para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  valem:

- i)  $f(n + 7) = f(n)$   
ii)  $f(n + 17) = f(n)$ .

Quanto vale  $f(2012)$ ?

- a) 24                      b) 34                      c) 17                      d) 14                      e) 7

06. Dado um número natural  $n$ , seja  $D(n)$  o conjunto dos divisores positivos de  $n$ . Dizemos que  $n$  é um número MAGISTRAL quando o produto dos divisores de  $n$  é igual ao quadrado de  $n$ . Por exemplo, 6 é um número MAGISTRAL, pois  $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$  e  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 = 6^2$ . Qual a soma de todos os números MAGISTRAIS menores que 50?

- a) 293                      b) 300                      c) 301                      d) 304                      e) 339

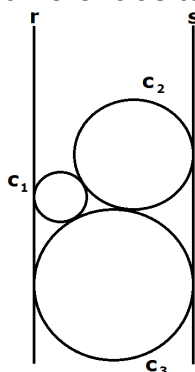
7. No início, os números complexos não eram vistos como números, mas sim como um artifício algébrico útil para se resolver equações. Descartes, no século XVII, os chamou de números imaginários. Abraham de Moivre e Euler, no século XVIII começaram a estabelecer uma estrutura algébrica para os números complexos. Em particular, Euler denotou  $\sqrt{-1} = i$ . Baseado nisso, quanto vale a soma:  $i^0 + i^1 + i^2 + \dots + i^{2011} + i^{2012}$ ?

- a) 1                      b)  $-1$                       c)  $i$                       d)  $-i$                       e) 0

8. Quantas são as soluções inteiras positivas da equação  $5x + 7y = 2012$ ?

- a) 56                      b) 57                      c) 58                      d) 59                      e) 60

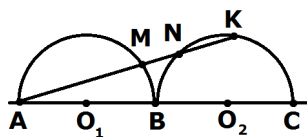
9. A figura mostra duas retas paralelas  $r$  e  $s$ . A reta  $r$  é tangente às circunferências  $C_1$  e  $C_3$ , a reta  $s$  é tangente às circunferências  $C_2$  e  $C_3$  e as circunferências tocam-se como também mostra a figura.



As circunferências  $C_1$  e  $C_2$  têm raios  $a$  e  $b$  respectivamente. Qual é o raio da circunferência  $C_3$ ?

- a)  $2\sqrt{a+b}$                       b)  $a+b$                       c)  $2\sqrt{a \cdot b}$                       d)  $\frac{4a \cdot b}{a+b}$                       e)  $2b - a$

10. São dados dois semicírculos, como na figura, de centros  $O_1$  e  $O_2$  e raios iguais. O comprimento do segmento  $\overline{AK}$  é  $l$ . Sabendo que  $\overline{MN} = \overline{NK}$ , os comprimentos  $\overline{MN}$  e  $\overline{AM}$  são respectivamente:



- a)  $\frac{l}{5}$  e  $\frac{l}{2}$                       b)  $\frac{l}{5}$  e  $\frac{2l}{5}$                       c)  $l$  e  $\frac{3l}{5}$                       d)  $\frac{l}{5}$  e  $\frac{3l}{5}$                       e)  $\frac{l}{2}$  e  $\frac{5l}{3}$

## 2ª PARTE

01. Uma professora levou balas para distribuir com todos os alunos de sua turma, mas propôs que o primeiro que acertasse quantas balas ela tinha para distribuir ganharia, como prêmio, duas balas a mais que os outros alunos. Para tal fim escreveu no quadro o seguinte:

- Tenho menos de 90 balas.
- Tenho um número ímpar de balas.
- Se eu fizer filas de 3 balas, sobram 2.
- Se eu fizer filas de 4 balas, sobra 1.
- Se eu fizer filas de 5 balas, sobram 3.

Carla foi a primeira a acertar a quantidade de balas que a professora tinha e ganhou 5 balas. Calcule o número de alunos nessa classe.

02. Seja  $f(x)$  uma função definida no conjunto dos inteiros positivos que satisfaz as seguintes condições:

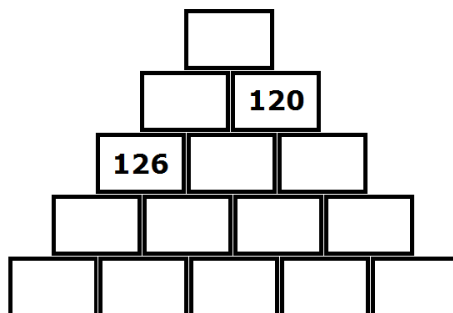
(i)  $f(1) = 1$

(ii)  $f(2n) = 2f(n) + 1$ , se  $n \geq 1$ .

(iii)  $f(f(n)) = 4n + 1$ , se  $n \geq 2$ .

Determine o valor de  $f(2^{2012} + 1)$ .

03. Uma pirâmide é formada por pedras com números naturais, cada uma delas se apoia sobre duas outras com exceção das pedras da base que estão apoiadas no chão. Dizemos que a pirâmide é multiplicativa quando o número escrito em cada pedra corresponde ao produto dos dois números que se encontram escritos nas pedras imediatamente abaixo dela. Por exemplo, se duas pedras vizinhas (numa mesma linha horizontal) tiverem os números 5 e 6 a pedra acima que nelas se apoia terá o número  $30 = 5 \cdot 6$ . Conhecidos os números indicados na figura abaixo e sabendo que nas pedras da base nenhum deles é maior do que 12, identifique, na figura a seguir, todos os números que faltam para completar a pirâmide multiplicativa.



04. A sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... é a sequência determinada pela recorrência:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, f_1 = 1 \\ &\text{e} \\ f_{n+1} &= f_n + f_{n+1} \text{ para todo } n > 0. \end{aligned}$$

Dizemos que uma sequência  $x_0, x_2, \dots, x_n, \dots$  de números reais é tipo-Fibonacci se

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \text{ para todo } n > 0.$$

a) Mostre que se  $x_0, x_2, \dots, x_n, \dots$  é uma sequência tipo-fibonacci tal que  $x_0 = 1$  e  $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  então

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Sejam  $x_0, x_2, \dots, x_n, \dots$  e  $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$  duas sequências tipo-fibonacci. Mostre que se  $x_0 y_1 - x_1 y_0 \neq 0$  podemos escolher  $a$  e  $b$  de modo que a sequência  $z_0, z_2, \dots, z_n, \dots$  onde  $z_n = ax_n + by_n$  seja exatamente a sequência de Fibonacci.

c) Mostre que o  $n$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci é  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$ .

05. Um engenheiro fará uma passarela de 10 metros de comprimento, ligando a porta da casa ao portão da rua. A passarela terá 1 metro de largura e ele, para revesti-la, dispõe de 10 pedras quadradas de lado 1m e 5 pedras retangulares de 1 metro por dois metros. Todas as pedras são da mesma cor, as pedras de mesmo tamanho são indistinguíveis umas das outras e o rejunto ficará aparente, embora com espessura desprezível. De quantas maneiras ele pode revestir a passarela?